Varianta 079

Subiectul I.

a) $\left|i^{2007}\right| = 1$. b) G(1,2). c) A(-2.-2), B (2,2). d) $\vec{i} + 3\vec{j}$. e) $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$. f) 2.

Subiectul II

1.a) 30 (11 sunt divizibile cu 4). b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) f(1)=2007. e) 3 funcții.

2.a) f'(x)=$2006x^{2005}+2008x^{2007}$. b) $\frac{1}{2007} + \frac{1}{2009}$.

c) f''(x)= $2006 \cdot 2005x^{2004} + 2008 \cdot 2007x^{2006} \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f convexă pe **R**.

d) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 4014$. e) x=0 punct de minim, valoarea minimă a funcției f este f(0)=0..

Subiectul III

a) detA=6, rangA=3. b) $\det A \neq 0 \Rightarrow$ A inversabilă. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $Y \in M_3(C) \Rightarrow \exists a,b,c,m,n,p,q,r,s \in C$ astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & m & n \\ p & b & q \\ r & s & c \end{pmatrix}$ din YA=AY obținem

$m = n = p = q = r = s = 0$, deci $\exists a,b,c \in C$ astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

d) $B \in M_3(C) \Rightarrow$ există a,b,c,d,e,f,g,h,i$\in$ C astfel încât $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Din $AB = A + I_3$ obținem

$B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Notăm P(n): $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n =$

$= \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$, n$\in$ **N***. P(1) este adevărată, şi considerând P(k) adevărată avem:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{k+1} \end{pmatrix}$$, deci P(k+1) adevărată şi conform principiului inducției matematice obținem P(n) adevărată pentru $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) Presupunem că f are o rădăcină multiplă. Atunci ea verifica şi ecuația $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, dar $f(0) = -\alpha \neq 0$, contradictie

g) Fie X$\in M_3(\mathbf{C})$ soluție a ecuației $X^{2007}=A$. Atunci $X \cdot A = X \cdot X^{2007} = X^{2007} \cdot X = A \cdot X$ şi conform punctului c) obținem X=$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ deci folosind e) avem X^{2007}=$\begin{pmatrix} a^{2007} & 0 & 0 \\ 0 & b^{2007} & 0 \\ 0 & 0 & c^{2007} \end{pmatrix}$ de unde $a^{2007}=3$, $b^{2007}=2$, $c^{2007}=1$. Din f)$\Rightarrow$ fiecare din ecuațiile precedente are 2007 soluții distincte, deci ecuația $X^{2007}=A$ are 2007^3 soluții în $M_3(\mathbf{C})$.

Subiectul IV.

a) $1-\frac{1}{e}$. b) $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n dx = -e^{-x}x^n\Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}nx^{n-1}dx = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$. c) Se demonstrează prin inducție matematică. d) $x\in [0,1] \Rightarrow e^0 \le e^x \le e^1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le e^{-x} \le 1 \Rightarrow \frac{x^n}{e} \le x^n e^{-x} \le x^n$.

e) Integrând inegalitățile de la punctul d) avem $\int_0^1 \frac{x^n}{e}dx \le \int_0^1 x^n e^{-x}dx \le \int_0^1 x^n dx, \forall n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$

$\frac{1}{(n+1)e} \le I_n \le \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) Din e) obținem $\frac{1}{(n+1)e} \le \frac{n!}{e}\left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\right) \le \frac{1}{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$. Presupunem că e$\in \mathbf{Q}$ deci $e = \frac{p}{q}, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*$ şi aplicăm relația anterioară pentru n=q. $\frac{1}{(q+1)!} \le$

$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{q!}\right) \le \frac{p}{q(q+1)!}$, iar înmulțind cu q! obținem

0< $\frac{1}{q+1} < p(q-1)! - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{q!}\right) < \frac{p}{q(q+1)} < 1$ deoarece $q \ge 2$, contradicție cu

p(q-1)!-q! $\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{q!}\right) \in \mathbf{Z}$.

g) Folosind inegalitățile de la punctul e) obținem $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n e}{n!} = 0$, iar din punctul c)

$\lim_{n\to\infty}\left(e - \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\right)$=0, de unde e-$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = 0$.